TD n°7: Fonctions spéciales

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

La fonction Γ.

Exercice 1. Une formule due à Euler.
On part du produit infini pour Γ :

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} = \lim_{N\to\infty} e^{-\gamma s}\frac{1}{s\prod_{n=1}^{N}(1+s/n)}\prod_{n=1}^{N} e^{s/n}$$
$$= \exp\left[\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\gamma\right)s\right]\frac{N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}$$

Par définition de γ, on a $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\gamma = \log(n)+o(1)$, et donc :

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\frac{N^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}e^{o(1)} = \lim_{N\to\infty}\frac{N^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}.$$

Pour passer de la première expression à la deuxième, on remarque que $(N+1)^s = \prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s$, ce qui prouve que

$$\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{N}\frac{(1+1/n)^s}{(1+s/n)} = \frac{(N+1)^s N!}{s(s+1)\cdots(s+N)}.$$

Comme $(N+1)^s/N^s\to 1$, on obtient l'existence de la limite et l'égalité.

Exercice 2. Le théorème de Bohr-Mollerup.
Cet exercice vise à prouver le théorème de Bohr-Mollerup, qui dit que $t\mapsto\Gamma(t)$ est la seule fonction positive sur $\mathbb{R}_{>0}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $F(t+1) = tF(t)$;

(ii) $t\mapsto F(t)$ est logarithmiquement convexe, c'est-à-dire que $\log F$ est convexe;

(iii) $F(1) = 1$.

1. Récurrence : si $F(n) = (n-1)!$ alors $F(n+1) = nF(n) = n!$, et on a bien $F(1) = 1 = 0!$.

2. On applique l'inégalité de convexité au segment d'extrémités n et $n+1$, on a $t(n+1)+(1-t)n = n+t$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\log F(n+t) &\leqslant (1-t)\log F(n) + t\log F(n+1)\\ &\leqslant \log F(n) - t\log F(n) + t\log F(n) + t\log(n)\\ &\leqslant \log F(n) + t\log(n).\end{aligned}$$

3. On applique l'inégalité de convexité au segment d'extrémités $n-1$ et $n+t$, on a $n = \frac{1}{1+t}(n+t)+\frac{t}{1+t}(n-1)$. Ainsi :

$$\log F(n) \leqslant \frac{1}{1+t}\log F(n+t) + \frac{t}{1+t}\log F(n-1).$$

En multipliant par $t+1$, on obtient l'inégalité demandée, à savoir

$$(t+1)\log F(n) \leq \log F(n+t) + t\log F(n-1).$$

4. L'inégalité précédente se réécrit $\log F(n+t) \geqslant \log F(n) + t\log(n-1)$. Les deux questions précentes donnent donc l'encadrement

$$\log F(n) + t\log(n) \leqslant \log F(n+t) \leqslant \log F(n) + t\log(n-1).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$(n-1)^t(n-1)! \leqslant F(n+t) \leqslant n^t(n-1)!$$

Comme $F(n+t) = (t+n-1)\cdots(t+1)tF(t)$, on obtient finalement

$$\frac{(n-1)^t(n-1)!}{t(t+1)...(t+n-1)} \leqslant F(t) \leqslant \frac{n^t(n-1)!}{t(t+1)...(t+n-1)}.$$

5. En prenant $n \to \infty$, on trouve $\Gamma(t) \leqslant F(t) \leqslant \Gamma(t)$ pour $t \in]0,1]$. Comme F et Γ vérifient la même équation fonctionnelle $F(t+1) = tF(t)$, elles sont égales sur $\mathbb{R}_{>0}$ entier.

Exercice 3. La fonction digamma.
On définit la fonction $\psi(s) = \mathrm{dlog}\Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$.

1. On part des équations $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$. On utilise ensuite l'additivité de la dérivée logarithmique et le fait que $\mathrm{dlog}(s) = 1/s$, $\mathrm{dlog}\sin(\pi s) = \pi\cot(\pi s)$.

2. Intuitivement, on aurait envie d'écrire

$$\log\Gamma(s) = -\gamma s - \log(s) + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{s}{n} - \log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right)$$

au moins pour $\Re(s) > 0$ (même pour $s \notin \mathbb{R}_{\leqslant 0}$). Cependant, même si cette série converge localement uniformément vers une fonction holomorphe qui se trouve être un logarithme de Γ (son exponentielle fait clairement Γ), on n'a a priori pas l'assurance que ce soit le "bon" logarithme. Ce n'est pas très important puisque les différents logarithmes de Γ possibles diffèrent de constantes qui disparaîtront quand on dérivera. Il suffit alors de prendre la dérivée terme à terme (ce qu'on peut faire car la somme converge localement uniformément, ainsi que la somme des dérivées). On obtient alors

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right).$$

Notons finalement que dans notre cas précis, on peut s'assurer que le logarithme de gamma trouvé est bien le principal en évaluant par exemple en $s = 1$ ou en se restreignant à $\mathbb{R}_{>0}$ où l'égalité est clairement vraie. comme annoncé.

3. Il s'agit simplement de calculer $\psi^{(n)}(1)$. Clairement, $\psi(1) = -\gamma$ car la série se télescope.
En dérivant terme à terme, on peut établir, pour $k \geqslant 1$

$$\psi^{(k)}(s) = \frac{k!(-1)^{k+1}}{s^{k+1}} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{k!(-1)^{k+1}}{(s+n)^{k+1}}.$$

En évaluant en 1, on trouve $\psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1)$, ce qui conclut.

4. Toute l'astuce se trouve dans le fait que pour $\Re(z) > 0$, on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}dt.$$

La formule

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right)$$

se transforme alors en

$$\psi(s) = -\gamma - \int_0^\infty e^{-st} + \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nt} - e^{-(n+s)t}dt$$

5. On écrit
$$\sum_{n=1}^{N}\left(e^{-nt}-e^{-(n+s)t}\right)=(1-e^{-st})\frac{e^{-t}-e^{-(N+1)t}}{1-e^{-t}}.$$
On réécrit, avec la représentation intégrale pour γ donnée,
$$\psi(s)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t}dt-\int_0^\infty e^{-st}+\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty(1-e^{-st})\frac{e^{-t}-e^{-(N+1)t}}{1-e^{-t}}dt.$$
On réarrange l'intégrande :
$$\begin{aligned}&\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}-e^{-st}+\frac{(1-e^{-st})(e^{-t}-e^{-(N+1)t})}{1-e^{-t}}\\&=\frac{e^{-t}}{t}+\frac{1}{1-e^{-t}}\left(-e^{-t}-e^{-st}+e^{-(s+1)t}+e^{-t}-e^{-(s+1)t}-(1-e^{-st})e^{-(N+1)t}\right)\\&=\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}-\frac{(1-e^{-st})e^{-(N+1)t}}{1-e^{-t}}.\end{aligned}$$
Comme $\left|\frac{1-e^{-st}}{1-e^{-t}}\right|$ est bornée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, l'intégrale
$$\int_0^\infty\frac{1-e^{-st}}{1-e^{-t}}e^{-(N+1)t}dt$$
converge vers 0 quand $N\to\infty$ (par exemple par convergence dominée) et on en déduit que
$$\psi(s)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-st}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

Exercice 4. La formule de Stirling.
On va utiliser la représentation intégrale de l'exercice précédent et isoler les termes non-bornés quand s est grand pour en déduire la formule de Stirling pour $\log\Gamma(s)$.

1. Pour démontrer l'égalité, on peut par exemple dériver par rapport à s (on peut dériver sous le signe intégral car tout le monde est borné), et on trouve
$$\partial_s\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}.$$
On en déduit que l'intégrale s'évalue à $\log(s)+C$, et comme sa valeur en 0 est 0, on en déduit que c'est le log habituel.

2. On calcule
$$\begin{aligned}\psi(s+1)-\frac{1}{2s}-\log(s)&=\int_0^\infty\frac{-e^{-st}}{2}+\frac{e^{-st}-e^{-t}}{t}+\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-(s+1)t}}{1-e^{-t}}dt\\&=\int_0^\infty\left(\frac{-e^{-st}}{2}+\frac{e^{-st}}{t}-\frac{e^{-st}}{e^t-1}\right)dt\\&=-\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)e^{-st}dt\end{aligned}$$
Au voisinage de zéro, on a
$$-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}=\frac{-e^t+1+t}{t(e^t-1)}$$
qui est bornée car $e^t=1+t+O(t^2)$. On peut même calculer que la fonction se prolonge en zéro avec une valeur de $-1/2$ car $-e^t+1+t=-t^2/2+O(t^3)$ et $t(e^t-1)=t^2+O(t^3)$. On en déduit donc que $\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}$ s'annule à l'ordre 1 en zéro, et la fonction
$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)$$

est donc bien définie au voisinage de zéro. Il suffit alors d'intégrer brutalement pour obtenir

$$\log\Gamma(s+1) = s\log(s) - s + \frac{1}{2}\log(s) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-st}}{t}dt + C.$$

3. Le fait que la dérivée est bornée au voisinage de zéro découle du fait que la fonction se prolonge en une fonction analytique au voisinage de zéro. La forme explicite de la dérivée est moche mais il est assez clair qu'elle est intégrable au voisinage de l'infini. On écrit alors

$$F(t) = \frac{1}{2t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t(e^t-1)}.$$

Une IPP donne

$$\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty F'(t)e^{-st}dt.$$

Comme F' est intégrable et $|e^{-st}| < 1$, on a bien un $O(1/s)$.

4. La formule de Stirling découle immédiatement des deux questions précédentes. Si l'on prend $s = n$, on a

$$\log(n!) = n\log(n) - n + \frac{1}{2}\log(n) + C + O(1/n).$$

Cette constante est connue et est $C = \frac{1}{2}\log(2\pi)$.

La fonction ζ et les séries de Dirichlet.

Exercice 5. Le produit eulérien.
On démontre l'égalité

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers. Pour $x > 0$ réel, on note S_x l'ensemble des nombres entiers naturels dont tous les facteurs premiers sont $\leqslant x$.

1. Pour n nombre entier, p premier, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n. On développe explicitement

$$\prod_{p\leqslant x}\left(\sum_{k\leqslant M} p^{-sk}\right) = \sum_{(k_p)_{p\leq x}, k_p \leq M} \prod_p \frac{1}{p^{-sk_p}} = \sum_{n\in S_x, v_p(n)\leqslant M} \frac{1}{n^s}.$$

Un terme de la forme $\frac{1}{n^s}$ apparaît dans cette somme si et seulement si n est un produit de nombre premiers tous $\leqslant x$ et vérifie $v_p(n) \leqslant n$. En particulier, tous les éléments de S_x inférieurs à 2^M apparaissent dans cette somme. En effet, si $n \in S_x$ et n n'apparaît pas dans la somme, il existe un $p \leqslant x$ qui divise n à une puissance $> M$: en particulier, $n > p^M \geqslant 2^M$. Il s'ensuit que

$$\prod_{p\leqslant x}\left(\sum_{k\leqslant M} p^{-sk}\right) - \sum_{n\in S_x, n\leqslant 2^M}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\in S_x, v_p(n)\leqslant M, n>2^M}\frac{1}{n^s}$$

est une somme de $\frac{1}{n^s}$ avec seulement des $n > 2^M$. On borne très généreusement

$$\left|\sum_{n\in S_x, v_p(n)\leqslant M, n>2^M}\frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n\in S_x, v_p(n)\leqslant M, n>2^M}\frac{1}{n^{\Re(s)}} \leqslant \sum_{n>2^M}\frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

2. Le produit sur les p est fini, on peut faire tendre $M \to \infty$ pour obtenir l'égalité : d'une part

$$\prod_{p\leqslant x}\left(\sum_{k\leqslant M} p^{-sk}\right) \to \prod_{p\leqslant x}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

et d'autre part

$$\sum_{n\in S_x, n\leqslant 2^M}\frac{1}{n^s} \to \sum_{n\in S_x}\frac{1}{n^s}.$$

3. Même principe que plus tôt, mais cette fois-ci on observe que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}-\sum_{n\in S_x}\frac{1}{n^s}$$

ne contient que des termes de la forme $1/n^s$ avec $n>x$ car tout nombre entier $\leqslant x$ est divisible par un nombre premier $\leqslant x$. On borne encore une fois généreusement

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}-\sum_{n\in S_x}\frac{1}{n^s}\right|\leqslant\sum_{n\notin S_x}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\leqslant\sum_{n>x}\frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

Ce dernier terme étant le reste d'une série convergente, il tend vers 0 quand $x\to\infty$ et on obtient donc

$$\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}.$$

4. La preuve est *mutatis mutandis* exactement la même que ci-dessus.

Exercice 6. La dérivée logarithmique de ζ.
On définit la fonction Λ de Von Mangoldt par

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log(p) & n=p^k \text{ avec } p \text{ premier}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Comme avec ψ (cf exercice 3), on a

$$\log\zeta(s)=-\sum_p\log(1-p^{-s})$$

et on sait aussi qu'on a pas de multiple de $2i\pi$ ajouté car ζ envoie $\mathbb{R}_{>1}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$. On peut alors dériver terme à terme, et on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_p\frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}}=\sum_p\sum_{k\geqslant 1}\frac{\log(p)}{p^{ks}}.$$

On vérifie sans encombre que cette dernière série est précisément

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Exercice 7. L'anneau des séries de Dirichlet.
Formellement, l'anneau des séries de Dirichlet est l'anneau des suites de nombres complexes muni de la convolution arithmétique :

$$(a*b)_n=\sum_{d|n}a_db_{n/d}.$$

On dit qu'une série de Dirichlet est convergente s'il existe $\sigma\in\mathbb{R}$ tel que la série réelle $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge.

1. On peut réécrire la convolution arithmétique comme $(a*b)_n=\sum_{de=n}a_db_e$, ce qui rend la commutativité évidente. La distributivité sur l'addition est directe car

$$(a*(b+c))_n=\sum_{de=n}a_d(b_e+c_e)=\sum_{de=n}a_db_e+\sum_{de=n}a_dc_e.$$

Un rapide calcul montre que la convolution avec $(1,0,0,...)$ est l'identité. Reste l'associativité :

$$((a*b)*c)_n=\sum_{de=n}\left(\sum_{uv=d}a_ub_v\right)c_e=\sum_{uve=n}a_ub_vc_e=\sum_{uw=n}a_u\left(\sum_{ve=w}b_vc_e\right)=(a*(b*c))_n$$

2. Si $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge, alors la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ converge normalement sur $\Re(s)\geqslant\sigma$ et définit donc une fonction holomorphe sur $\Re(s)>\sigma$.

3. On se ramène à démontrer que
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}=0$$
pour $\Re(s) >> 0$ seulement si $a_n=0$ pour tout n. Quitte à changer s par $s+\sigma_0$ avec $\sigma_0 >> 0$, on suppose $|a_n|\leqslant 1$ pour tout n. On procède par l'absurde : si m est le plus petit entier tel que $a_m\neq 0$, on écrit
$$0=\frac{1}{m^s}\left(a_m+\sum_{n\geqslant m+1}\frac{a_n}{(n/m)^s}\right).$$
En multipliant par m^s des deux côtés, on obtient
$$-a_m=\sum_{n\geqslant m+1}\frac{a_n}{(n/m)^s}.$$
Les $m-1$ premiers termes de la série, à savoir $\frac{a_k}{(k/n)^s}$ avec $k=m+1,...,2m-1$, tendent clairement vers 0. La série restante peut être majorée
$$\left|\sum_{n\geqslant 2m}\frac{a_n}{(n/m)^s}\right|\leqslant\sum_{n\geqslant 2m}\frac{|a_n|}{(n/m)^{\Re(s)}}\leqslant\sum_{k\geqslant 2}\frac{m}{k^{\Re(s)}}$$
car on a supposé $|a_n|\leqslant 1$ pour tout n. Cette série tend vers 0 quand $\Re(s)\to\infty$, ce qui donne une absurdité car on avait supposé $a_m\neq 0$.

4. Notant $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n, on a la borne triviale $\tau(n)<n$ et
$$\left|\sum_{d|n}a_d b_{n/d}\right|\leqslant\tau(n)\max_{i\leqslant n}|a_i|\max_{j\leqslant n}|b_j|.$$
Si σ est tel que $\sum\frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge, alors $n^{-\sigma}|a_n|$ est bornée, et $n^{-\sigma}\max_{i\leqslant n}|a_j|$ aussi. On choisit un σ qui fait converger $\sum\frac{|a_n|}{n^\sigma}$ et $\sum\frac{|b_n|}{n^\sigma}$, et alors
$$n^{-2\sigma-3}|(a*b)_n|\leqslant n^{-2\sigma-3}\cdot n\max_{i\leqslant n}|a_i|\max_{j\leqslant n}|b_j|=O(n^{-2})$$
et la série de Dirichlet est convergente !
On peut alors écrire
$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}\cdot\sum_{m\geqslant 1}\frac{b_m}{m^s}&=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{a_nb_m}{(mn)^s}\\&=\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sum_{mn=k}a_nb_m}{k^s}\end{aligned}$$
où l'échange de l'ordre de sommation est possible grâce à la convergence absolue.

5. Si $a_1=0$, alors $(a*b)_1=a_1b_1=0$. Si $a_1\neq 0$, on définit explicitement l'inverse $(b_n)_n$ par récurrence. On commence par poser $b_1=a_1^{-1}$. Supposons l'inverse défini jusqu'au terme $n-1$, on a $(a*b)_n=0$ donc $a_1b_n+\sum_{d|n,d>1}a_db_{n/d}=0$. Il suffit alors de poser $b_n=-a_1^{-1}\sum_{d|n,d>1}a_db_{n/d}$ et on a par définition fabriqué un inverse.

6. On suppose pour simplifier les calculs que $a_1=1$, ce qui revient à multiplier tous les b_n par a_1 (et ne change donc pas la convergence). Pour $\sigma>0$ assez grand, on a $\sum_{n>1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}\leqslant 1$ - en effet, quitte à remplacer σ par $\sigma_0+\sigma$ on peut supposer $(a_n)_n$ bornée, et on se ramène au fait que $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\sigma}\to 0$ quand

$\sigma \to \infty$. On va montrer avec la définition explicite de (b_n) qu'on a $|b_n| \leqslant n^\sigma$ pour tout n. En effet, on a

$$\begin{aligned} |b_n| &\leqslant \sum_{d|n, d>1} |a_d b_{n/d}| \\ &\leqslant n^\sigma \sum_{d|n,d>1} \frac{|a_d|}{d^\sigma} \\ &\leqslant n^\sigma \sum_{d>1} \frac{|a_d|}{d^\sigma} \\ &\leqslant n^\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, $n^{-\sigma-2}b_n$ est convergente.

Exercice 8. Produits eulériens formels

On munit l'anneau des séries de Dirichlet formelles de la distance suivante :

$$d\left((a_n)_n, (b_n)_n\right) = \frac{1}{\min\{n \geqslant 1 : a_n \neq b_n\}}.$$

1. La symétrie et la séparation sont immédiates (implicitement $d(f,f) = 0$).
   Reste à démontrer l'inégalité ultramétrique. Notons $f = (a_n)_n, g = (b_n)_n, h = (c_n)_n$. L'inégalité $d(f,h) \leqslant \max(d(f,g), d(g,h))$ est équivalente à

   $$\min\{n \geqslant 1 : a_n \neq c_n\} \geqslant \min\left(\min\{n \geqslant 1 : a_n \neq b_n\}, \min\{n \geqslant 1 : b_n \neq c_n\}\right)$$

   ou encore

   $$\max\{n \geqslant 1 : a_n = c_n\} \geqslant \min\left(\max\{n \geqslant 1 : a_n = b_n\}, \max\{n \geqslant 1 : b_n = c_n\}\right).$$

   Cette dernière inégalité est clairement vraie : si $a_1 = b_1, ..., a_r = b_r$ et $b_1 = c_1, ..., b_s = c_s$ alors $a_1 = c_1, ..., a_{\min(r,s)} = c_{\min(r,s)}$.
2. $$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \frac{a}{m^s} \sum_{k \geqslant 0} \frac{a^k}{m^{ks}} \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{a^k}{m^{ks}} - \sum_{k\geqslant 1} \frac{a^k}{m^{ks}} = 1. \end{aligned}$$

3. On note S_x l'ensemble des nombres entiers dont tous les facteurs premiers sont $\leqslant x$. Dans l'anneau des séries de Dirichlet, on a

   $$\begin{aligned} \prod_{p \leqslant x} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} &= \prod_{p\leqslant x} \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_p^k}{p^{ks}} \\ &= \sum_{(k_p)_{p\leq x}} \prod_{p \leq x} \frac{a_p^{k_p}}{p^{k_p s}} \\ &= \sum_{n \in S_x} \frac{a_n}{n^s}. \end{aligned}$$

   On peut s'amuser à justifier très proprement le passage de la première à la deuxième ligne, par exemple en faisant une récurrence sur le nombre de premiers impliqués dans le produit. C'est un calcul élémentaire bien qu'un peu encombrant, qu'on ne fera pas ici.
   Il s'ensuit que

   $$d\left(\prod_{p\leqslant x} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}}, \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}\right) = d\left(\sum_{n \in S_x} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

   Ainsi, on a bien convergence du produit vers la série annoncée quand $x \to \infty$.

4. Une suite totalement multiplicative est entièrement déterminée par ses valeurs aux nombres premiers : si $n = \prod p^{v_p(n)}$, alors $a_n = \prod a_p^{v_p(n)}$. Il s'ensuit qu'une suite dont la série de Dirichlet associée admet une telle représentation comme produit infini est nécessairement totalement multiplicative. Réciproquement, une suite totalement multiplicative admet toujours une factorisation explicitée dans la question précédente.

5. De la même façon que la question 3, on a

$$\begin{aligned}\prod_{p\leqslant x}\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_{p^k}}{p^{ks}} &= \sum_{(k_p)_{p\leq x}}\prod_{p\leqslant x}\frac{b_{p^{k_p}}}{p^{k_p s}} \\ &= \sum_{n\in S_x}\frac{b_n}{n^s}\end{aligned}$$

on a donc la même estimation

$$d\left(\prod_{p\leqslant x}\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_{p^k}}{p^{ks}}, \sum_{n\geqslant 1}\frac{b_n}{n^s}\right)\leqslant \frac{1}{x}$$

et le produit infini converge.

6. Si une série de Dirichlet admet une représentation comme produit infini de séries entières en les p^{-s}, alors le coefficient a_n s'écrit comme $\prod_p a_{p^{v_p(n)}}$ et la suite est faiblement multiplicative. Réciproquement, si on considère une suite faiblement multiplicative, elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur les puissances des nombres premiers et le produit infini défini à la question précédente converge vers la suite.

7. Assez clairement, on a

$$\prod_p f_p(s)\cdot\prod_p g_p(s) = \prod_p f_p(s)g_p(s)$$

et $f_p(s)g_p(s)$ est encore une série entière en p^{-s}. Si on écrit $f_p(s)$ comme $F_p(p^{-s})$ avec F_p une série entière, alors comme le coefficient constant de F_p est 1, F_p admet un inverse F_p^{-1} qui a aussi un coefficient constant de 1, et donc $\prod_p F_p(p^{-s})^{-1}$ est un inverse de $\prod_p f_p(s)$, qui est donc également faiblement multiplicatif. Notons $\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des nombres premiers, qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ par n'importe quelle énumération des nombres premiers. L'isomorphisme entre le sous-groupe des séries de Dirichlet faiblement multiplicatives (appelons-le D_{fm}) et $\Lambda(\mathbb{C})^{\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})}$ est donné par

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathbb{C})^{\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})} &\to D_{\mathrm{fm}} \\ (F_p)_p &\mapsto \prod_p F_p(p^{-s}).\end{aligned}$$

L'inverse de ce morphisme est explicite, il est donné par

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{fm}} &\to \Lambda(\mathbb{C})^{\mathrm{Spm}(\mathbb{Z})} \\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s} &\mapsto \left(\sum_{k\geqslant 0} a_{p^k}T^k\right)_p.\end{aligned}$$

Remarque. On peut topologiser similairement l'anneau $\mathbb{C}[\![z]\!]$ des séries entières, en posant $|f| = c^{-\mathrm{ord}_0(f)}$ pour un $c > 1$où $\mathrm{ord}_0(f)$ est l'ordre d'annulation de de f en zéro. On peut vérifier que $d_c(f,g) = |f-g|$ définit une distance également, et que la topologie induite ne dépend pas de c.
L'idée derrière ces distances est de considérer que les nombres complexes ont essentiellement tous la même taille, et qu'en comparaison z (ou $1/n^s$ dans le cas des séries de Dirichlet) est infinitésimalement petit, d'où $|a| = 1$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z| = c^{-1}$.
La topologie se comporte très bien dans cet anneau : la multiplication et la somme sont continues, et, par exemple, la suite des sommes partielles d'une série converge vers la série elle-même. On peut aussi se servir de cette topologie pour prouver des résultats par densité, par exemple l'associativité de la composition de séries entières.